1-Effectuons un raisonnement par récurrence.

Pour n = 0, $2^{3n} - 1 = 0$ et zéro est un multiple de 7.

Supposons que, pour un certain rang k quelconque,

$2^{3k} - 1$ soit un multiple de 7 et montrons que $2^{3(k+1)} - 1$ est un multiple de 7 :

$2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k} \times 2^3 - 1$

$2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k} \times 8 - 1$

$2^{3(k+1)} - 1 = 7 \times 2^{3k} + 2^{3k} - 1.$

Nous avons : 7×2^3k multiple de 7 et $2^{3k} - 1$ multiple de 7, par hypothèse de récurrence.

Donc, pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

Autre méthode : $2^{3n} - 1 = (2^3)^n — 1$ soit $2^{3n} - 1 = 8^n - 1$.

Or $8^n - 1 = (8 - 1)(8^{n-1} + 8^{n-2} + \ldots + 8 + 1)$

$8^n - 1 = 7 X (8^{n-1} + 8^{n-2} + \ldots + 8 + 1).$

Donc $2^{3n} - 1$ est bien un multiple de 7.

Nous avons $2^{3n+1} - 2 = 2 . (2^{3n} - 1).$

Comme $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7, nous en déduisons que, pour tout entier naturel n, $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7.

Nous avons : $2^{3n+2} - 4 = 4(2^{3n} - 1)$

Comme $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7, nous en déduisons que, pour tout entier naturel n, $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7.

2-Nous avons, en utilisant les résultats de la question précédente

$2^{3n} - 1 = 7k$, avec k entier naturel, donc $2^{3n} = 7k + 1$

$2^{3n+1} - 2 = 7k'$ donc $2^{3n+1} = 7 k' + 2$;

$2^{3n+2} - 4 = 7k''$ donc $2^{3n+2} - 7 k'' + 4$.

Or tout entier naturel s'écrit sous l'une des formes :

3n, 3n + 1, 3n + 2.

Nous en déduisons que les restes possibles de la division par 7 des puissances de 2 sont 1 ; 2 et 4.

Qarray.tn - Aora Blech - Qarray.tn